

Lasersko hlađenje atoma i atomski satovi

Domagoj Kovačić

June 4, 2018

1 Uvod

U ovom seminarskom radu ukratko ćemo pojasniti principe hlađenja i zarobljavanja atoma u magneto-optičku stupicu (eng. MOT). U prvom poglavlju pojasniti ćemo fiziku iza laserskog hlađenja atoma koja se temelji na iskorištavanju Dopplerovog efekta u procesu hlađenja. U drugom poglavlju proučit ćemo primjer standardnog postava za stvaranje magneto-optičke stupice. Konačno, u trećem poglavlju okrenut ćemo se primjeni magneto-optičke stupice u optičkim satovima.

2 Lasersko hlađenje

Lasersko hlađenje atoma temelji se na prijenosu impulsa fotona na atoma u kontinuiranim ciklusima apsorpcije i spontane emisije. Prikaz jednog ciklusa dan je na Slici 1.

Atom u osnovnom stanju absorbira foton i prelazi u pobuđeno stanje i zaprima impuls Δp_a u smjeru propagacije fotona. Prelaskom u osnovno stanje spontanom emisijom atom emitira foton u nasumičnom smjeru. Zbog nasumične prirode smjera emisije fotona, nakon velikog broja spontanih emisija promjena impulsa atoma zbog emisije će se usrednjiti u nulu, tj. nema promjene impulsa atoma zbog emisije.

Drugim riječima, ukupna promjena impulsa atoma dolazi zbog apsorpcije upadnog fotona i u smjeru je propagacije upadnog zračenja. Efektivno, atomi osjećaju silu u smjeru propagacije upadne svjetlosti. Ova sila naziva se sila zračenja (eng. radiation force, pressure force) i općenito za atome u

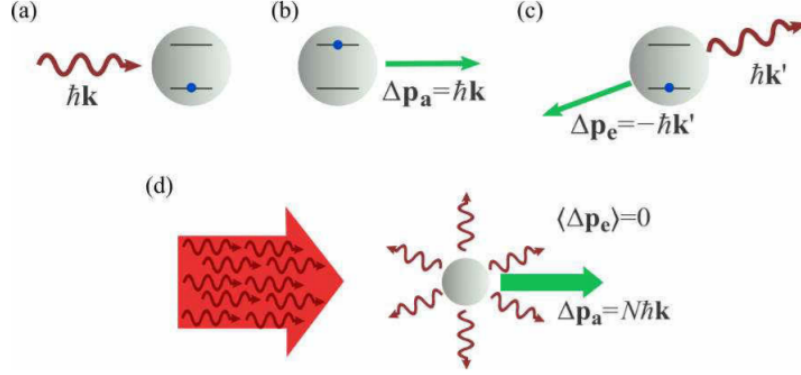


Figure 1: Lasersko hlađenje atoma pri prijenosu impulsa fotona na atom. Atom absorbira foton (Slika 1a) te dobiva impuls Δp_a u smjeru gibanja absorbiranog fotona te prelazi iz osnovnog u pobuđeno stanje (Slika 1b). Prelaskom u osnovno stanje dolazi do spontane emisije fotona u nasumičnom smjeru (Slika 1c). Zbog nasumičnosti smjera emisije fotona usrednjeni impuls atoma zbog emisije nakon N ciklusa je jednak nula, odnosno ukupna promjena impulsa atoma dolazi od absorpcije i u smjeru je propagacije upadnog fotona.[1]

mirovanju ima oblik [2]

$$\vec{F} = \frac{\hbar\vec{k}\Gamma}{2} \frac{s_0}{1 + s_0 + \left(\frac{2\delta}{\Gamma}\right)^2} \quad (1)$$

gdje Γ predstavlja prirodnu širinu linije, s_0 saturacijski parametar proporcionalan s intenzitetom laserskog zračenja, a $\delta = \omega_0 - \omega_l$ je frekventni pomak lasera od rezonantne frekvencije atomske prijelaza (eng. detuning).

Za atome koji se gibaju brzinom v potrebno je preinačiti relaciju (1) budući da zbog Dopplerovog efekta dolazi do promjene frekvencije koju atomi vide kao rezonantnu $\omega'_l = \omega_l - \vec{k}\vec{v}$, te tada detuning postaje funkcija brzine atoma kao $\delta = \omega_0 - \omega_l - \vec{k}\vec{v}$.

Promotrimo utjecaj Dopplerovog efekta na hlađenje atoma u najjednostavnijem mogućem slučaju -1D hlađenje gdje imamo dvije suprotno propagirajuće zrake iste frekvencije ω_l , no s suprotnim valnim vektorima \vec{k} . Usto pretpostavimo da se atom giba smjeru jedne od zrake brzinom \vec{v} te dolazi do Dopplerovog efekta.

Zbog Dopplerovog efekta, biti će potrebno smanjiti frekvenciju lasersku svjetlosti ispod frekvencije atomskog prijelaza ("detuning u crveno od rezonancije") za iznos $\vec{k}\vec{v}$. Tada atom preferirano absorbira fotone koji se gibaju u smjeru suprotno od samog atoma, dok fotone koji se kopropogiraju s njim atom vidi izvan rezonancije. Efektivno, atom absorbira samo one atome koji mu prijenosom impulsa smanjuju brzinu čime dolazi do hlađenja atoma. Opisani princip naziva se Dopplerovo hlađenje. Za malene brzine atoma ($v < \delta, \Gamma$), efektivna ukupna sila od dviju zraka koju atom osjeća je dana kao [2]

$$F = \frac{8\hbar k^2 \delta s_0}{\Gamma(1 + s_0 + (\frac{2\delta}{\Gamma})^2)} v = -\beta v \quad (2)$$

Sila ima oblik sile trenja, pa se atomi ohlađenim ovom metodom naziva optička molasa. Prikaz opisane sile dan je na Slici 2. Ukupna sila je dana kao superpozicija sila dviju suprotno propagirajućih zraka. Za malene brzine, ukupna sila F je linearno ovisna o brzini, sukladno jednadžbi (1). Očito,

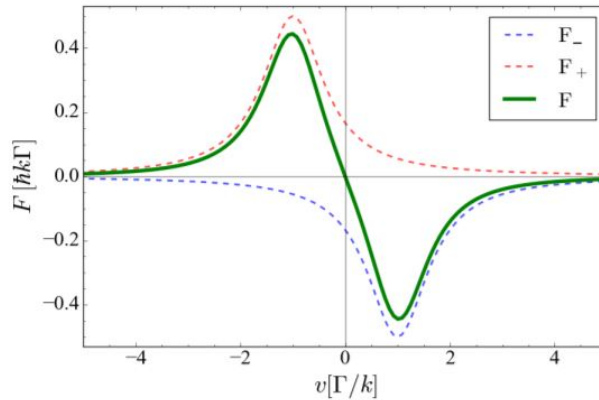


Figure 2: Sila laserskog Doppler hlađenja. Ukupna sila F dana je kao superpozicija dviju sila F_- i F_+ koje predstavljaju sile dviju suprotno propagirajućih zraka. Za malene brzine vidljiva je linearna ovisnost sile o brzini dana relacijom (2).[1]

atomi se u magneto-optičkoj stupici gibaju u 3D prostoru. Zato su za njihovo usporavanje potrebna tri seta međusobno okomitih suprotno propagirajućih kružno polariziranih zraka (u x, y i z smjeru). Prikaz takvog postava dan je na Slici 3. Tada atom koji se nalazi u presjecištu tih zraka i giba s brzinom

\vec{v} u proizvoljnom smjeru vidi silu u 3 okomita smjera (x,y,z), odnosno za svaku projekciju njegove brzine (v_x , v_y i v_z) postoji set zraka koji će usporavati atom u toj dimenziji i efektivno usporiti atom u 3D prostoru. Ipak usporavanje atoma nije dovoljno za stvaranje MOT-a budući sila iz relacije (2) nije prostorno ovisna, tj atomi bez postojanja metode zarobljavanja brzo difundiraju iz područja hlađenja.

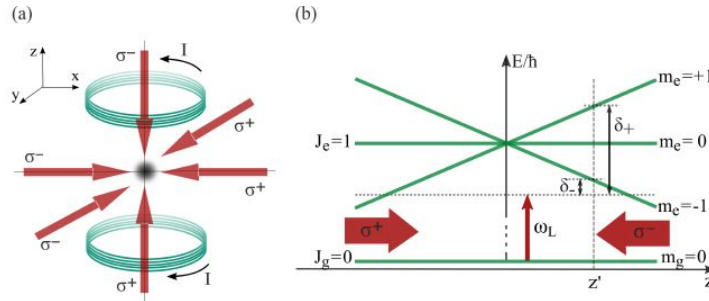


Figure 3: Prikaz trodimenzionalne magneto-optičke stupice. Stupica se sastoji od 3 seta međusobno okomitih suprotno propagirajućih kružno polariziranih zraka i sustava anti-Helmholtz zavojnica. Laserske zrake hlade atome pomoću ciklusa absorpcije i spontane emisije, a zavojnice vrše prostorno zarobljavanje atoma[1]

Prostorno zarobljavanje atoma vrši gradijent magnetskog polja stvaran sustavom anti-Helmholtz zavojnica. Anti-Helmholtz je sustav dviju međusobno paralelnih zavojnica kroz koje teče ista struja, ali u suprotnim smjerovima, prikazano crnim strelicama na Slici 3. Time se stvara linearno magnetsko polje koje je u centru između dviju zavojnica jednako nula i linearno raste s pomakom od centra stupice.

$$B(z) = A \cdot z \quad (3)$$

Princip zarobljavanja pojasnit ćemo na primjeru atoma s osnovnim stanjem $J_g = 0$ i pobuđenim stanjem $J_g = 1$, no princip se može proširiti na druga stanja. Pod utjecajem magnetskog polja dolazi do cijepanja podnivoa pobuđenog stanja na 3 podnivoa $m_e = -1$, $m_e = 0$ i $m_e = 1$ zbog Zeemanovog efekta prikazanog na Slici 3(b). Zbog konstantnog gradijenta polja $A = \frac{\delta B}{\delta z}$, energija $m_e = 1$ linearno raste, a energija $m_e = -1$ linearno opada s odmakom atoma od centra stupice dok energija $m_e = 0$ je jednaka 0. Za

atom na položaju z' frekventni odmak laserskog zračenja s frekvencijom ω_l je manji za $m_g = 0- > m_e = -1$ prijelaz nego za $m_g = 0- > m_e = 1$. Drugim riječima stanje $m_e = -1$ je frekventno bliže frekvenciji laserske svjetlosti od $m_e = 1$ stanja. Kako σ_- kružno polarizirana zraka inducira prijelaze za koje vrijedi $\Delta m = m_e - m_g = -1$, atom preferirano absorbira σ_- zračenje koje ga gura prema centru stupice. Analogno se događa na $-z'$ položaju gdje atom absorbira σ_+ . Dakle efektivno zbog konstantnog gradijenta polja, atom preferirano absorbira fotone upravo one zrake koja ga gura prema centru stupice, tj. dolazi do prostornog zarobljavanja atoma i nastanka magneto-optičke stupice. Sila koja gura atome prema centru stupice je za malena odstupanja od centra stupice proporcionalna položaju atoma u stupici, te je stoga ukupna sila koja usporava i zarobljava atome ima oblik gušenog harmoničkog oscilatora

$$F = -\beta v - kz \quad (4)$$

gdje je β koeficijent gušenja iz relacije (2), a k konstanta opruge magneto-optičke stupice. Za magneto-optičku stupicu temperatura se definira preko ekviparticijskog teorema

$$\frac{k_b T}{2} = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} \quad (5)$$

Dakle smanjenjem brzine atoma dolazi do njihovog hlađenja.

Ipak opisani princip ima određena ograničenja. Opisano Dopplerovo hlađenje implicira da će atom absorbirati fotone dok mu brzina ne padne na $v = 0$, tj. temperatura mu padne na 0K, no važno je podsjetiti se za je u gornjem opisu zanemarena difuzija atoma zbog nasumične prirode spontane emisije pri kojoj atom vrši proizvoljni hod (random walk) kao i doprinos difuziji od fluktuacija broja absorbiranih atoma [2].

Efektivno, temperatura oblaka atoma u MOT-u dana je ravnotežom sile hlađenja (od laserskih zraka) i difuzije koja grije atome. Najniža moguća temperatura koju je moguće postići Dopplerovim hlađenjem naziva se Dopplerovom temperaturom i dana je kao [2]

$$T_D = \frac{\hbar \Gamma}{2k_b} \quad (6)$$

Dopplerove temperature su većinom reda par mK. Za hlađenje ispod Dopplerove tehnike razvijene su napredne tehnike hlađenja koje koriste gradijente polarizacije laserskog zračenja [3] i evaporativno hlađenje [4] kako bi dostigle

sub-dopplerovske temperature na skali μK (eng. sub-doppler cooling), dok najnaprednije tehnike omogućavaju stvaranje Bose-Einsteinovog kondenzata hladnih atoma gdje se dostižu temperature od svega par nanokelvina.

3 Postav za lasersko hlađenje

Magneto-optička stupica je skupni naziv za kompleksni eksperimentalni postav sastavljen od vakuumske komore s visokim vakuumom, Helmholtz i anti-Helmholtz zavojnica te većeg broja frekventno visokostabiliziranih laserskih postava s pripadajućim postavima za frekventnu stabilizaciju i velikog broja različitih optičkih elemenata.

Prikaz jednog takvog eksperimentalnog postava složenog u Laboratoriju za hladne atome na Institutu za Fiziku dan je na Slici 4. Detaljni opis eksperimentalnog postava može se pronaći u [1][5]. Postav se sastoji od vakuumske komore, lasera za hlađenja i naseljavanje s pripadnim metodama za frekventnu kontrolu i stabilizaciju (polarizacijska spektroskopija [6] za laser za hlađenje, saturacijska spektroskopija [7] za laser za naseljavanje), anti-Helmholtz zavojnica za zarobljavanje atoma i velikog broja drugih elemenata potrebnih u eksperimentalnoj realizaciji MOT-a.

Može se uočiti da na Slici 4 se nalaze dva lasera. tzv laser za hlađenje pojašnjen u prethodnom poglavlju i dosad nespomenuti laser za naseljavanje. Kako bi pojasnili ulogu lasera za naseljavanje potrebno je detaljnije proučiti hiperfinu energijsku strukturu atoma gdje ćemo kao pokazni primjer uzeti izotop rubidija 87 čija je struktura dana na Slici 5 [1]. Rb87 je odabran iz dva razloga: Rubidij je alkalijski kemijski element s samo jednim valentnim elektronom, pa time i relativno jednostavnom hiperfinom strukturom. Usto, u Laboratoriju za hladne atome na Institutu za Fiziku hlade se upravo atomi Rb87.

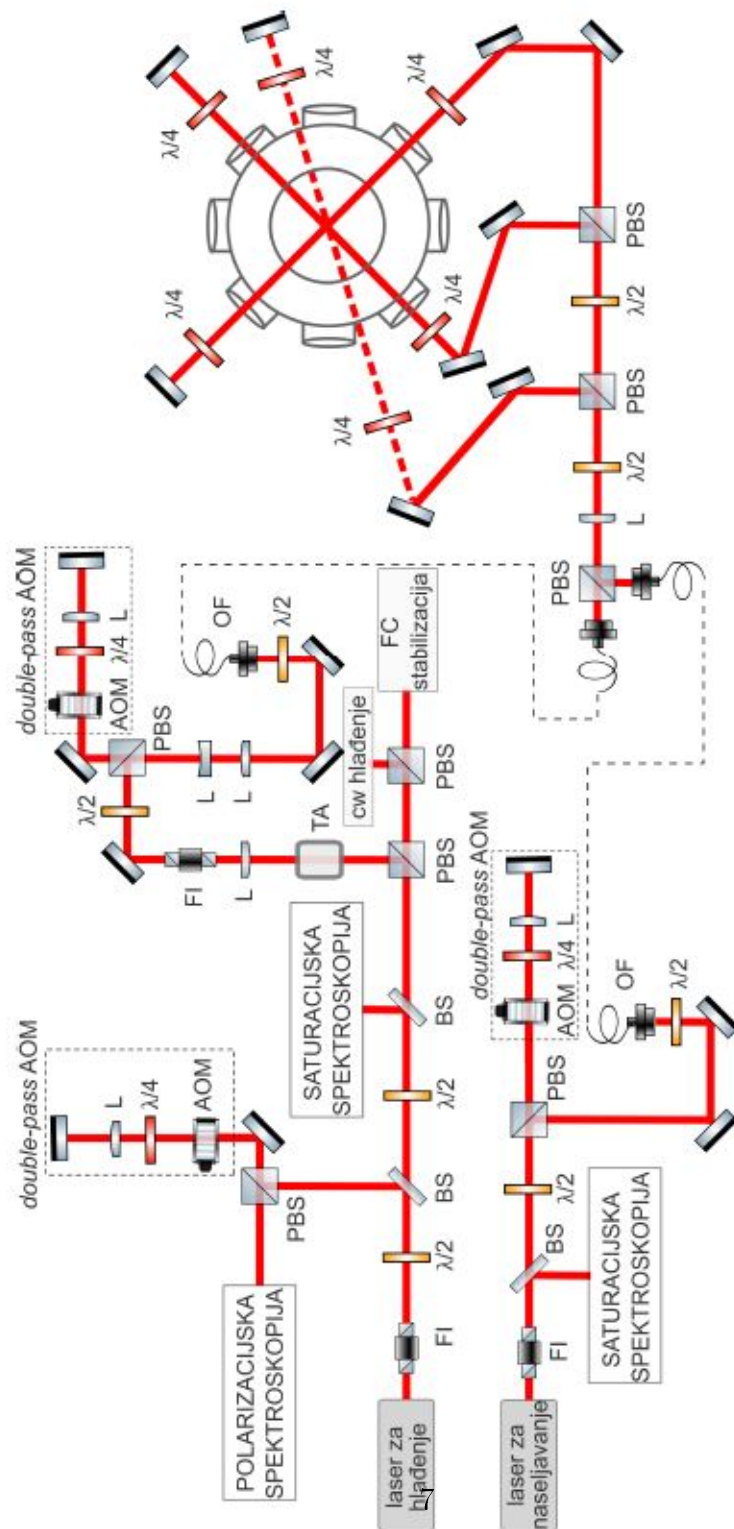


Figure 4: Eksperimentalni postav za realizaciju magneto-optičke stupice. Označe: FI-Faradayev izolator;PBS-polarizacijski djelitelj zrake; BS-djelitelj zrake; L-leća; $\lambda/2$, $\lambda/4$ -polarizacijske pločice; TA-optičko pojačalo; OF-optičko vlakno [1]

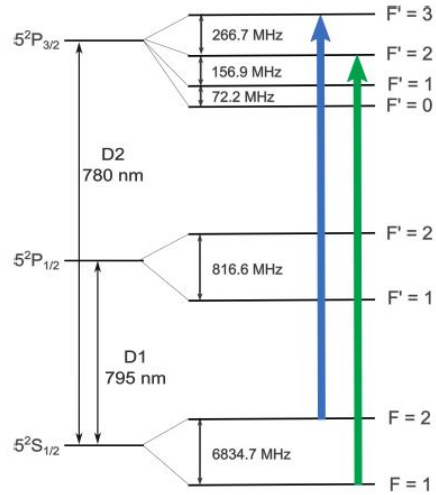


Figure 5: Shematski prikaz hiperfine strukture rubidija 87. Plavom strelicom označena je frekvencija lasera za hlađenje, a zelenom frekvencija lasera za naseljavanje. Laser za hlađenje nalazi se na prijelazu $F = 2 \rightarrow F' = 3$ (tzv. zatvoreni prijelaz), a laser za naseljavanje na $F = 1 \rightarrow F' = 2$ prijelazu gdje F označava ukupni angularni moment atoma u osnovnom stanju, a F' ukupni angularni moment atoma u pobuđenom stanju.

Hiperfina struktura je nadogradnja na finu strukturu atoma i nastaje zbog sprezanja spinskog angularnog momenta jezgre I i ukupnog elektronskog angularnog momenta atoma J gdje je ukupni angularni moment atoma dan kao $F = I + J$ s vrijednostima momenta u rasponu $F = I - J \dots I + J$.

Fotoni imaju ukupni angularni moment $J = 1$, te je stoga u atom-polje interakciji moguće ostvariti samo prijelazi čiji se ukupni angularni moment atoma F razlikuju za 1 tj. $\Delta F = 0, \pm 1$.

Za laser za hlađenje koji se nalazi na $F = 2 \rightarrow F' = 3$ prijelazu to znači sljedeće: atom se pobudi iz $F = 2$ u $F' = 3$ ($\Delta F = 1$). Kako osnovno stanje Rb87 nema $F = 3$ stanje (atom ne može ostvariti $F = 3 \rightarrow F' = 3$, $\Delta F = 0$ prijelaz), atom mora pasti u $F = 2$ stanje s $\Delta F = 1$. Prijelaz $F' = 3 \rightarrow F = 1$ zabranjen je izbornim pravilima budući da bi trebalo doći do promjene angularnog momenta od $\Delta F = 2$. Nakon pada u $F = 2$ stanje, atom ponovo biva pobuđen u $F' = 3$ stanje. Zbog ovakvog prisilnog ponosa ($F = 2 \rightarrow F' = 3 \rightarrow F = 2$) navedeni prijelaz se naziva zatvorenim prijelazom.

No, potrebno se podsjetiti da je zbog Dopplerovog efekta za stvaranje MOT-a bilo potrebno smanjiti frekvenciju lasera za hlađenje u odnosu na $F = 2 \rightarrow F' = 3$ prijelaz ("detunirati u crveno od prijelaza"). Dakle laser ima frekvenciju manju od frekvencije $F = 2 \rightarrow F' = 3$ prijelaza, što omogućava da atom bude pobuđen u $F' = 2$ stanje nakon čega se može relaksirati u $F=2$ ili $F=1$ osnovno stanje. Ako se atom relaksira u $F=1$, on efektivno izlazi iz ciklusa hlađenja.

Upravo je zbog toga potreban laser za naseljavanje: on osigurava da će atomi koji padnu u $F=1$ stanje biti pobuđeni u $F' = 2$. Nakon toga atom ili pada u $F=2$ s $\Delta F = 0$ te se vraća u ciklus hlađenja ili pada u $F=1$ s $\Delta F = 1$ gdje ga laser za naseljavanje vraća u $F' = 2$ sve dok atom ne relaksira u $F=2$ i vrati se u proces hlađenja.

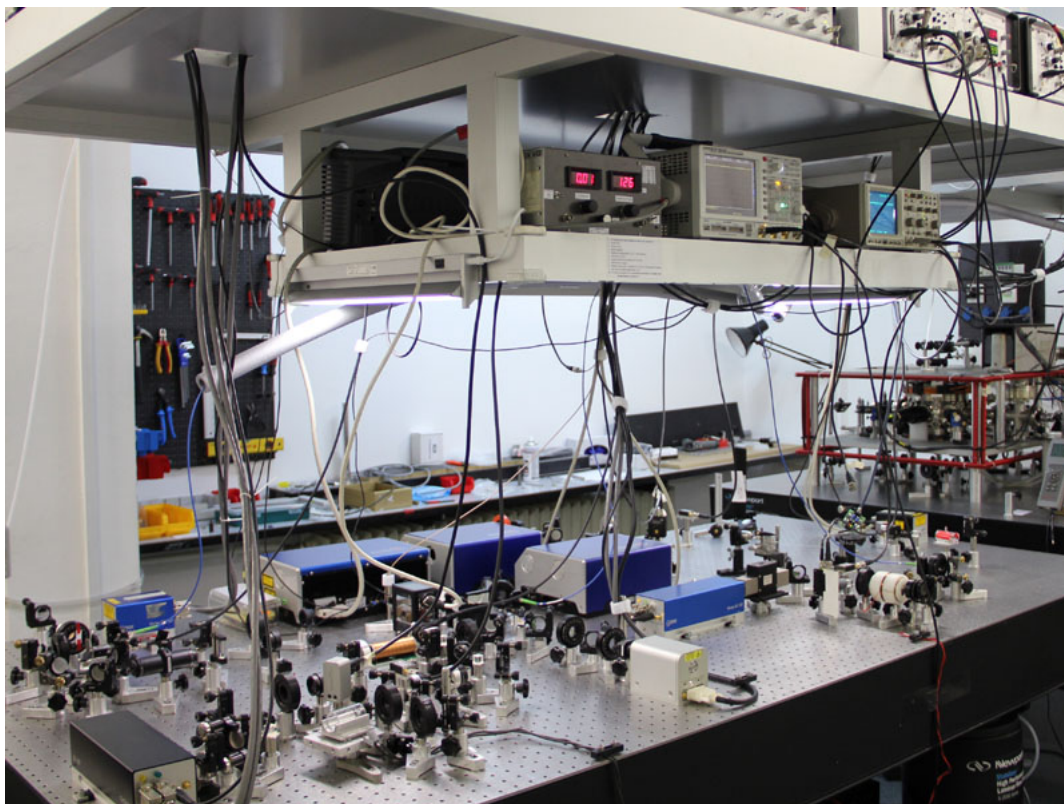


Figure 6: Prikaz eksperimentalnog postava u Laboratoriju za hladne atome

4 Atomski satovi

Atomski satovi su kompleksni sustavi za iznimno precizna mjerenja vremena i frekvencije koji u svom centru sadrže upravo magneto-optičke stupice opisane u prethodnim poglavljima. Atomski satovi predstavljaju primarne i sekundarne frekventne i vremenske standarde te su ključni u brojnim područjima života od sinkronizacije satelita i GPS sustava do kontrole frekvencije televizijskih signala. Vjerojatno najpoznatija uloga atomskih satova jest u definiciji sekunde: sekunda odgovara vremenskom intervalu potrebnom za 9,192,631,770 oscilacija između osnovnih hiperfinskih stanja ($F=3 \rightarrow F=4$) cezija-133 (Slika 7) zbog čega cezijev atomski sat predstavlja primarni vremenski standard. Pod sekundarne vremenske standarde spadaju već spomenuti rubidij, indij, kalcij, iterbij i drugi. Osim neutralnih atoma, sekundarni standard čine i atomski satovi u ionskim zamkama-Hg,Al,Be,Mg. Trenutno najprecizniji atomski satovi imaju preciznosti reda femtosekunde

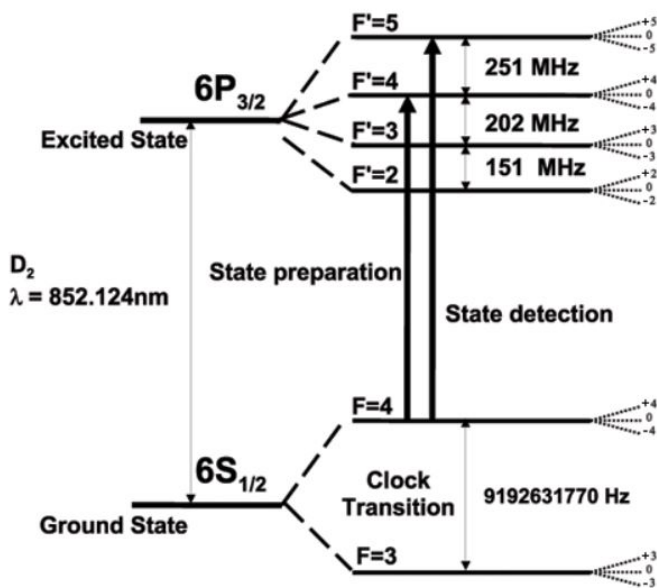


Figure 7: Shematski prikaz hiperfinskih prijelaza cezija-133. Primarni standard čini hiperfinski prijelaz između osnovnih stanja cezija $F=3 \rightarrow F=4$ s frekvencijom od 9,192,631,770 Hz.

tj. imaju grešku od 1 sekunde od 100 milijuna godina.

Atomski satovi temelje se korištenju mikrovalnog zračenja kao pobudi hiperfinskih

prijelaza u atomima. Satovi koji čine primarni standard su osnovi magneto-optička stupica u atomskoj fontani (Slika 8.) U prvom koraku atomi su

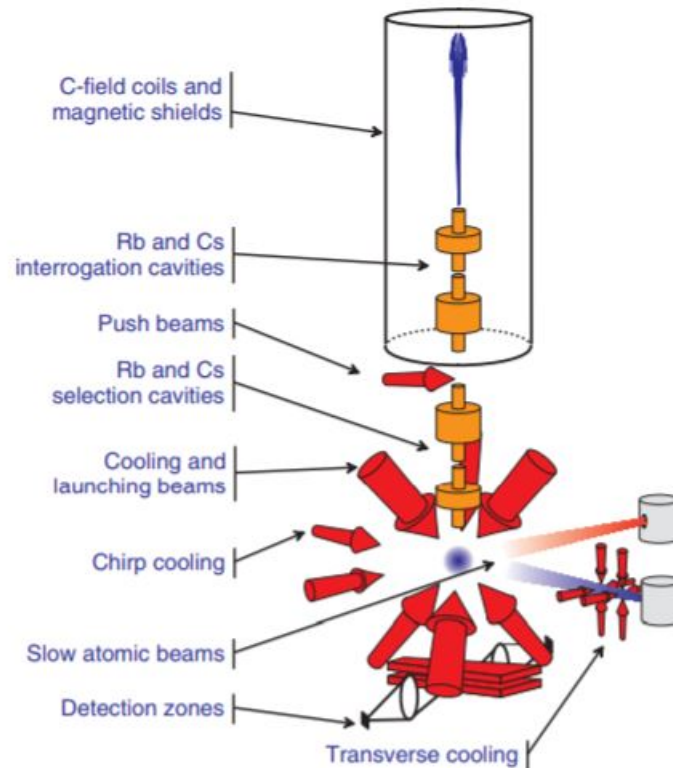


Figure 8: Pojednostavljeni eksperimentalni postav atomske fontane s dva dualnim MOT-om za rubidij i cezij. Postav se sastoji od magneto-optičke stupice, rezonantnih šupljina s probama za pobudu hiperfinskih prijelaza. Cijeli postav nalazi se unutar visoke visokovakuumske cijevi (fontana) s štitom od vanjskih magnetskih polja i drugih parazitskih smetnji[9]

ohlađeni u magneto-optičkoj stupici u pri dnu fontane od temperature od svega par mikrokelvina korištenjem sub-Doppler tehnika hlađenja te potom laserskom silom pogurani prema gore do rezonantne šupljine s probnim laserom. Mikrovalno zračenje dolazi od visokofrekventno stabiliziranog oscilatora Kako bi se stabilizirala frekvencija koji oscilator stvara, oscilator je ohlađen kriogenkim tehnikama na temperature blizu apsolutne nule čime se smanjuju temperaturne oscilacije rezonantne šupljine oscilatora i posljedično

smanjuje promjena u frekvenciji (eng. frequency drift.). Dodatno, oscilator je često frekventno spregnut na maser- mikrovalni ekvivalent lasera čime se dodatno povećava frekventna stabilnost oscilatora[9]. Mikrovalno zračenje pobuđuje rezonantni prijelaz što uzrokuje fluorescenciju oblaka padu u osnovno stanje. Fluorescencija se skuplja u fotodetektoru i se stvara absorpcijski signal. Frekvencija, koja daje najjaču fluorescenciju odgovara frekvenciji rezonantnog prijelaza.

Ova pobuda stvara se dva puta- prvi put kada se oblak diže prema gore i drugi put kada oblak pod utjecajem gravitacije pada prema dolje. Prilikom prve interakcije odabrani su atomi u $F=3$ stanju (niže od dva osnovna stanja cezija-133). Time dio atoma bude pobuđen u stanje $F=4$. Pri povratku proba testira udjele atome u $F=3$ i $F=4$ stanju i iz njihove razlike stvara error signal-negativnu povratnu vezu kojom stabilizira frekvenciju oscilatora. Kada je frekvencija zračenja jednaka frekvenciji prijelaza pri drugoj pobudi, svi atomi će se nalaziti u pobuđenom stanju. Opisana procedura naziva se Ramsey interakcija i čini fizikalnu podlogu u većini atomskih satova[10]. Iako sa preciznošću od 10^{-14} s cezijevi atomski satovi još uvijek predstavljaju primarni standard, u posljednjih desetak godina krenuo je snažan sustava s još većom preciznošću u mjerenju vremena i frekvencije- optički atomski satovi. Optički atomski satovi funkcioniraju na sličnom principu kao i standardni mikrovalni satovi, no kao pobuda koristi se zračenje u vidljivom spektru, umjesto u mikrovalnom području. No optički satovi imaju jednu izmimno važnu razliku. Oni umjesto standardnih masera koriste poseban tip pulsnih lasera- frekventni češalj. Pulsni laser, za razliku od uobičajenih kontinuiranih lasera, stvaraju ultrakratke pulseve svjetlosti gdje pulsevi, ovisno o tipu pulsniog lasera, mogu trajati par stotina nanosekundi pa sve do par femtosekundi. Frekventni češalj čini poseban tip pulsniog lasera u kojem svi modovi u rezonantnoj šupljini su fazno spregnuti. Ova fazna sprega modova u frekventnom spektru daje niz ekvidistantnih frekventnih linija (Slika 9.) Frekventni češalj predstavlja spektar sastavljen od ekvidistantnih frekventnih linija. Udaljenost linija naziva se frekvencijom repeticije koja je najčešće reda do par stotina MHz, no kako frekventni češalj može sadržavati 10⁹ frekventnih linija, frekventni češalj se može rasprostirati preko par desetaka do par stotina THz. Ovdje leži ogromna snaga frekventnog češlja- u principu moguće je imati par milijuna absolutno stabilnih frekventnih linija budući da je za stabilizaciju frekventnog češlja potrebno stabilizirati samo dvije RF frekvencije. Jedna je već spomenuta frekvencija repeticije, dok je druga tzv. frekvencija pomaka (f_{CEO} na Slici 9b) koja predstavlja udaljenost

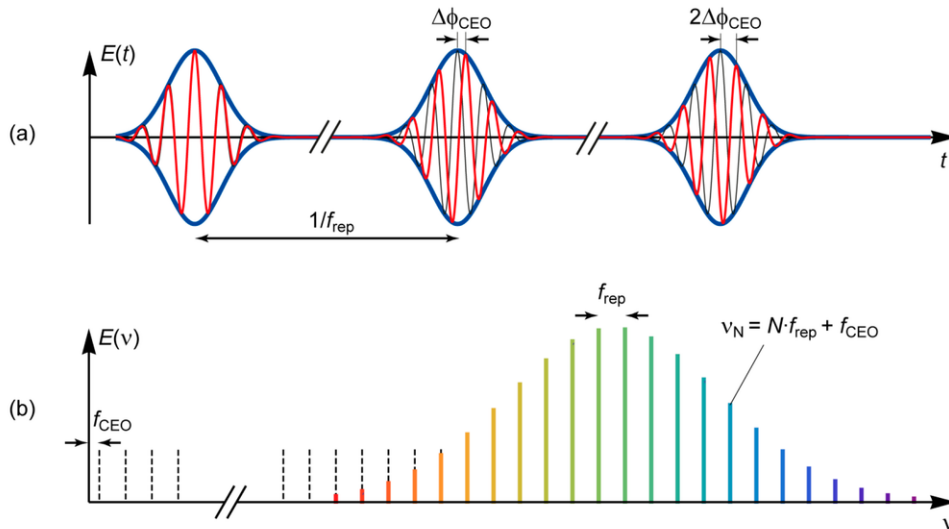


Figure 9: Shematski prikaz frekventnog češlja. Slika a) prikazuje ultrakratke pulseve svjetlosti gdje je električno polje svakog pulsa pomaknuto za konstantnu fazu $\Delta\phi_{CEO}$ od susjednog pulsa. Ovakvo fazno sprezanje u frekventnoj domeni daje frekventni češalj-niz ekvidistantnih spektralnih linija (Slika 9b).[11]

prve linije frekventnog češlja od nule. Stabilizacijom navedenih frekvencija dobiva se absolutna stabilnost velikog broja frekventnih linija gdje stabilnost linije može biti svega par mikroherza. Ovakva visoka stabilnost omogućava iznimno precizno mjerenje vremena.

U razvoju optičkih satova prednjače satovi koji kao referencu koriste ultrahladne atome stroncija[12].

Stroncij zbog iznimno uskih hiperfinskih prijelaza u kombinaciji s visokostabiliziranim frekventnim češljevima daje stabilnosti od 10^{-19} s čime za čak 5 redova veličine nadmašuju najbolje mikrovalne atomske satove. Stoga nije nerealan očekivati da će u skoro budućnosti upravo optički atomski satovi postati novi primarni standard i omogućiti dosad neviđene preciznosti u mjerenju frekvencije i vremena.

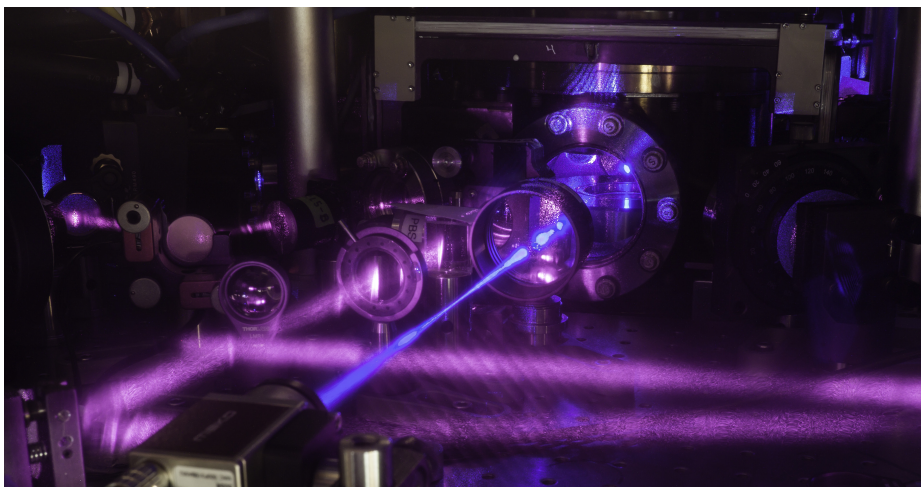


Figure 10: Stroncijev optički atomski sat [13]

References

- [1] A.Cipriš, Hlađenje atoma optičkim frekventnim češljem, diplomski rad.
- [2]] Metcalf, H. J. i van der Straten, P. Laser Cooling and Trapping. Springer, 1999
- [3] Cohen Tannoudji, C.; Dalibard, J. Laser Cooling Below the Doppler Limit by Polarization Gradients- Simple Theoretical Models. J. Opt. Soc. Am. B 6 2023-2045 (1989)
- [4] Anderson, M. H.; Ensher, J. R.; Matthews, M. R.; Wieman, C. E.; Cornell, E. A. Observation of Bose- Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. Science Vol. 269. 5221, (1995).
- [5] D. Buhin, Optomehanika hladnih atoma uzrokovana femtosekundnim laserskim zračenjem, diplomski rad.
- [6] Pearman, C.P. et al. Polarization spectroscopy of a closed atomic transition: Application to laser frequency locking. J. Phys. B 35, 5141-5151 (2002)
- [7] Demtroder, W. Laser Spectroscopy. Springer, 2012.
- [8] <https://en.wikipedia.org/wiki/NIST-F1>

- [9] S. Bize, P. Laurent, M. Abgrall, H. Marion, I. Maksimovic, L. Cacciapuoti, J. Grunert, C. Vian, F. Pereira dos Santos, P. Rosenbusch, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Wolf, A. Clairon, A. Luiten, M. Tobar and C. Salomon, Cold atom clocks and applications
- [10] https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_interferometry
- [11] Stéphane Schilt, Thomas Södmeyer, Carrier-Envelope Offset Stabilized Ultrafast Diode-Pumped Solid-State Lasers
- [12] Andrew D. Ludlow, Martin M. Boyd, and Jun Ye, Optical atomic clocks
- [13] <https://www.nist.gov>