

Stabilizacija optičkog frekventnog češlja

Domagoj Kovačić

Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000, Zagreb

20.1.2017

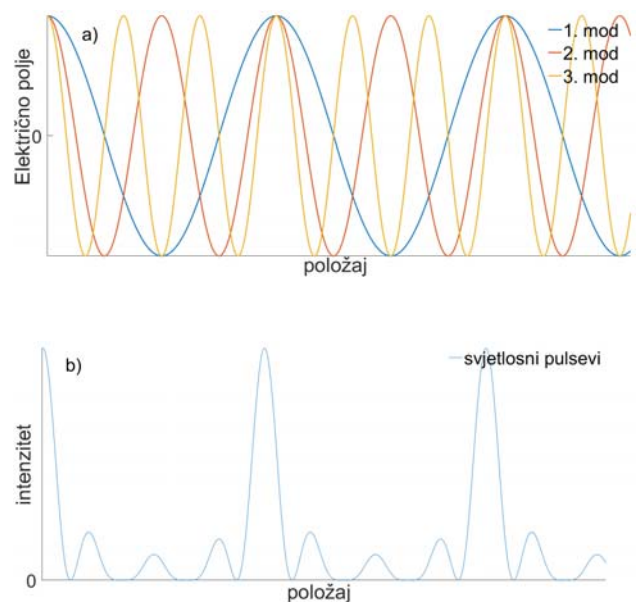
U ovom je radu izvršena stabilizacija optičkog frekventnog češlja koristeći tehniku heterodine spektroskopije. Ona uključuje mjerenje frekvencije udara između jednog moda frekventnog češlja i kontinuiranog lasera, te stabilizaciju iste. Osim toga, mjeri se i stabilizira frekvencija repeticije pulsnog lasera koji čini frekventni češalj. Obje frekvencije nalaze se u rasponu od 0-40 MHz, a stabilizirane su na red veličine mHz u vremenu integracije od 100s, što daje relativnu frekventnu točnost od oko 10^{-10} . U svrhu mjerenja stabilnosti frekvencija napravila se statistička obrada podataka te izračunala Allanova devijacija.

I. OPTIČKI FREKVENTNI ČEŠALJ

Mjerenje apsolutnih frekvencija u optičkom valnom području, te ultra-precizna optička spektroskopija predstavljale su jedan od najvećih izazova u području metrologije, te atomske i molekulske fizike. Rješenje se pojavilo u obliku optičkog frekventnog češlja, tzv. optičkog ravnala, za koji je prof. J. Hallu i prof. T. Hanschu dodijeljena Nobelova nagrada 2005. godine. Danas je frekventni češalj raspostranjen u različitim područjima eksperimentalne fizike, od optičkih satova gdje je omogućio preciznosti mjerenja vremena na skali od 10^{-18} s [?], do astronomije gdje je omogućio testiranje teorije ekspanirajućeg svemira. Frekventni češljevi koriste se i za visoko preciznu atomsku i molekulsku spektroskopiju, a od nedavno primjenjuju se i u području hladnih atoma.

Spektar frekventnog češlja sastoji se diskretnih, jednoliko udaljenih frekventnih linija u optičkom području. Takav spektar nastaje kao rezultat emisije pulsnog lasera koristeći tehniku zaključavanja modova, eng. mode locking. Tehnika zaključavanja modova temelji na principu sinhronizacije longitudinalnih modova laserske rezonatorske šupljine u jednoj točki prostora, tj. nameće se konstantna fazna razlika između longitudinalnih modova koji osciliraju unutar rezonantne šupljine. Zbog toga, na različitim mjestima rezonatorske šupljine dolazi do konstruktivne i destruktivne interferencije longitudinalnih modova što uzrokuje stvaranje ultra-kratkih pulseva. Tehnikom zaključavanja modova tipično se postižu laserski pulsevi vremena traja-

nja od oko 100 fs, a ovisno o duljini rezonatora frekvencija repeticije može biti u rasponu od 80 do 100 MHz.



Slika 1. Longitudinalni modovi svjetlosti u rezonantnoj šupljini i svjetlosni pulsevi. Slika 1(a): Prikaz 3 longitudinalna moda svjetlosti u rezonantnoj šupljini. Zbog konstantnog pomaka u fazi između susjednih modova postoje točke unutar šupljine u kojima se maksimumi svih modova superponiraju te kreiraju snažne pulseve svjetlosti.

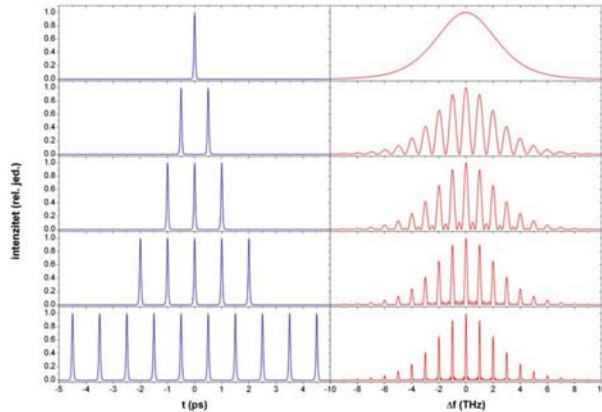
Slika 1(b): Prikaz ovisnosti intenziteta svjetlosti o položaju unutar rezonantne šupljine. U točkama superpozicije maksimuma modova nastaju pulsevi.

Na Slici 1 shematski je prikazan princip tehnike zaključavanja modova na primjeru tri longitudinalna moda koji osciliraju s konstantnim relativ-

nim pomakom u fazi unutar optičke šupljine.

Na Slici 1(a) moguće je uočiti položaje unutar šupljine u kojima se maksimumi modova zbrajaju te upravo u tim točkama nastaju pulsevi svjetlosti. Titranjem modova, pulsevi se gibaju kroz rezonantnu šupljinu te dolaskom na jedno od zrcala izlaze iz lasera.

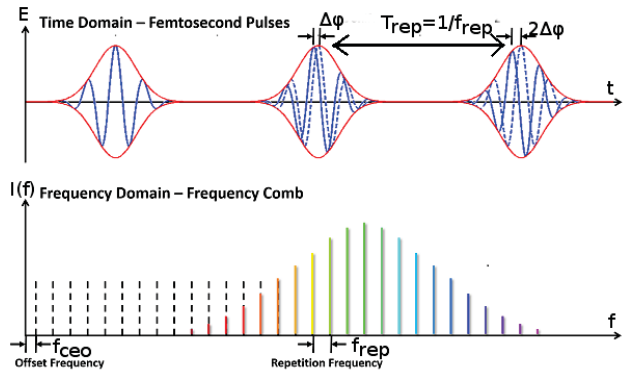
Na Slici 2 prikazan je intenzitet pulseva u vremenskoj i frekventnoj domeni, a ovisno o broju pulseva koji izlaze iz lasera. Na lijevom dijelu



Slika 2. Prikaz intenziteta pulseva u vremenskoj i frekventnoj domeni [?]

Slike 2 prikazano je pet različitih slučajeva karakteriziranih s različitim brojevima pulseva u vremenskoj domeni, dok desni dio Slike 2 prikazuje njihove odgovarajuće Fourierove transformate. Uočavamo da spektar samo jednog pulsa ima oblik gausijana. Povećavanjem broja pulseva spektar se sastoji od niza diskretnih ekvidistantnih frekventnih linija koje čine frekventni češalj. Detaljni prikaz niza ultra-kratkih pulseva u vremenskoj domeni i odgovarajućeg frekventnog češlja u spektralnoj domeni prikazan je na Slici 3. Pulsevi su vremenski odvojeni za vrijeme ponavljanja pulseva $T = \frac{1}{f_{\text{rep}}}$, te sadrže pomak u fazi (eng. phase shift) $\Delta\varphi$ definiran kao vremenska udaljenost između envelope pulsa, prikazano crveno, i maksimuma električnog polja pulsa, prikazano plavo. Pomak u fazi je jednak za bilo koja dva uzastopna pulsa i nastaje zbog kromatske disperzije svjetlosti koja uzrokuje razliku između grupne i fazne brzine u propagaciji elektromagnetskog vala.

Frekventna domena češlja prikazana je na do-



Slika 3. Vremenska i frekventna karakteristika frekventnog češlja. Gornja slika: Niz pulseva odvojenih za vrijeme repetitije $T = \frac{1}{f_{\text{rep}}}$. Električno polje pulsa (val nositelj) prikazan je plavom bojom, dok je crvenom bojom prikazana envelope pulsa svjetlosti. Između susjednih pulseva postoji pomak u fazi $\Delta\varphi$. Donja slika: Frekventni češalj. Modovi češlja udaljeni su za f_{rep} , a najniži mod češlja je od nule udaljen za f_{ceo} . Preuzeto iz [?]

njem dijelu Slike 3. Razmak između susjednih modova češlja određen je frekvencijom repetitije f_{rep} , a vrijednost odmaka prvog moda optičke šupljine od nule naziva se frekvencijom pomaka f_{ceo} .

Frekvencija n-tog moda frekventnog češlja dana je sa:

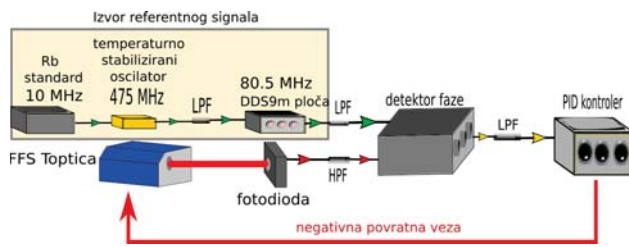
$$f_n = n f_{\text{rep}} + f_{\text{ceo}} \quad (1)$$

gdje f_n predstavlja optičku frekvenciju n-tog moda, a n je broj longitudinalnog moda (ukupan broj modova je $n \sim 10^6$). Frekvencije repetitije i pomaka nalaze se u RF području. Velik broj fazno usklađenih modova lasera omogućava prijelaz iz RF frekvencija (MHz) u optičke frekvencije (400-700 THz).

II. STABILIZACIJA FREKVENCIJE REPETICIJE

Velika preciznost mjerenja frekvencija u optičkom zahtjeva iznimnu stabilnost mjernog uređaja, u ovom slučaju frekventnog češlja. Iz relacije (1) vidi se da f_n ovisi o dva parametra: f_{rep} i f_{ceo} , te stoga je za potpunu stabilizaciju frekventnog češlja u principu potrebno stabilizirati te dvije frekvencije u RF području. Prvo se razvio postav za stabilizaciju f_{rep} i on je prikazan

na Slici 4.



Slika 4. Eksperimentalni postav za stabilizaciju frekvencije repeticije. Zelenim strelicama označen je referentni signal RF1 na koji se zaključava frekvencija repeticije, a crvenim strelicama označen je signal frekvencije repeticije. LPF i HPF predstavljaju niskopropusne i visokopropusne filtere.

Postav se sastoji od rubidijevog frekventnog standarda, temperaturno stabiliziranog oscilatora, izvora signala, detektora faze, PID kontrolera i niza niskopropusnih (LPF) i visokopropusnih (HPF) filtera. Metoda stabilizacije temelji se na principu usporedbe dva RF signala u detektoru faze -RF1 koji predstavlja visoko stabilizirani signal i RF2 kojeg želimo stabilizirati.

Temperaturno stabilizirani oscilator generira signal od 475 MHz i fazno se usklađuje sa frekventnim standardom koji radi na 10 Mhz. Time signal s oscilatora (RF1) poprima frekventnu točnost Rb standarda, te se dalje može koristiti kao visoko stabilizirana referenca. Kako je f_{rep} lasera kojeg koristimo u eksperimentu oko 80.5 MHz, izlazna frekvencija oscilatora od 475 MHz mora se spustiti do 80.5 MHz. To se radi pomoću generatora frekvencije, DDS9m ploče. Na kraju, visokostabilizirani signal prolazi kroz LPF od 98 MHz kako bi se signal očistio od neželjenih viših harmonika te ulazi u detektor faze.

RF2 predstavlja frekvenciju repeticije femtosekundnog lasera, a generira se mjerenjem vremena dolaska laserskih pulseva na brzu fotodiodu. Taj signal prolazi kroz visokopropusni filter od 41-800 Mhz te ulazi u detektor faze.

A. Detektor faze i PID kontroler

Pri stabilizaciji frekvencije repeticije koristi se poseban tip povratne veze poznat kao fazno zaključana petlja (eng. phase locked loop, PLL). Detektor faze vrši usporedbu RF1 i RF2 signala i

generira vremenski promjenjiv napon (tzv. error signal) na svom izlazu (ovisno o ulazu, tj. razlici RF1 i RF2):

$$V_{err}(t) = A \cdot \cos(\phi_{ref} - \phi_{laser}) \quad (2)$$

gdje ϕ_{ref} i ϕ_{laser} predstavljaju faze RF1 i RF2. Error signal se iz detektora faze šalje na PID kontroler.

PID kontroler koristi error signal sa ulaza te ga mijenja koristeći proporcionalni, integrirajući i derivirajući član [?], a u svrhu bolje regulacije izlaznog napona s obzirom na šumove i ostale vremenske promjene koje se javljaju u sistemu. Proporcionalni član množi error signal s konstantom K_p , te daje proporcionalni odgovor dan sa

$$P = V_{err}K_p \quad (3)$$

Povećanjem konstante K_p povećava se brzina odgovora sistema, no preveliki iznos konstante uzrokuje ubrzano osciliranje promatrane varijable (u našem slučaju frekvencije) te može doći do izbacivanja sustava iz ravnoteže.

Integrirajući član proporcionalan je iznosu i trajanju error signala, tj. dobiva se integriranjem error signala u vremenu

$$I = K_i \int V_{err}(t)dt \quad (4)$$

Derivirajući član promatra derivaciju error signala u vremenu

$$D = K_d \frac{V_{err}}{dt} \quad (5)$$

Derivirajući član pokušava predvidjeti ponašanje sistema analiziranjem trenutnog stanja sistema. Jedna od slabosti derivirajućeg člana je njegova osjetljivost na smetnje u sistemu (noise).

Na Slici 5 dana je fotografija dijela elektronike koja je u eksperimentu korištena za stabilizaciju f_{rep} . Cilj je postići $RF1=RF2$, pri čemu je error signal jednak nuli. Ukoliko se RF2 poveća ili smanji u odnosu na RF1, korekcija na laser je takva da se RF2 vraća u blizinu RF1. U svrhu korekcije f_{rep} , izlazni napon iz PID regulatora šalje se natrag na laser i to konkretno na piezzo element. Piezzo element pomiče jedno od zrcala rezonantne šupljine što mijenja duljinu same



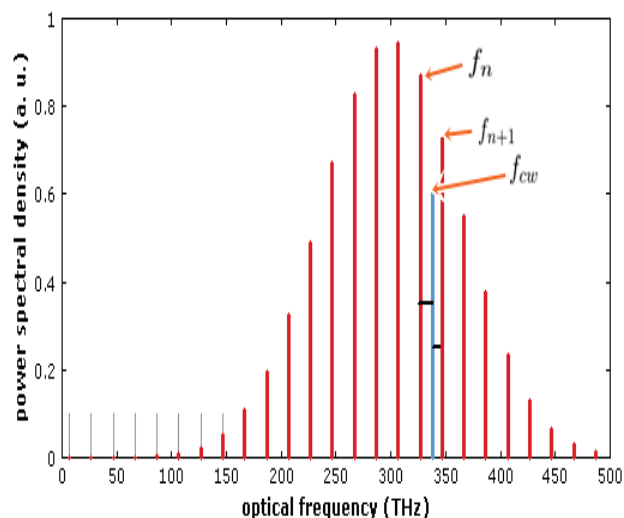
Slika 5. Detektor faze i PID kontroler. Prikazani su ulazni signali RF1 i RF2, error signal te PID kontrole

šupljine. Pomicanjem zrcala efektivno se mijenja frekvencija repeticije lasera te se omogućuje njezino zaključavanje na željenu referencu određenu Rb standardom.

III. STABILIZACIJA FREKVENCIJE UDARA

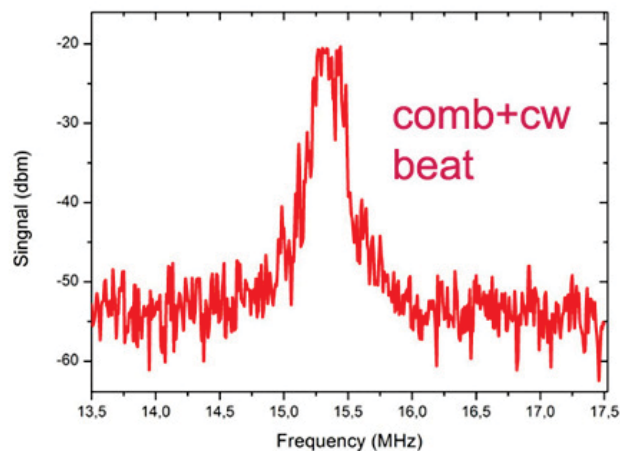
Stabilizacija frekvencije udara pokazala se kao puno kompleksniji problem od stabilizacije frekvencije repeticije. Shodno tome razvijen je cijeli niz tehnika za njenu stabilizaciju. Pojedine metode koriste više frekventne harmonike samog frekventnog češlja (tzv $f-2f$ [?] i $2f-3f$ [?] tehnike), dok druge metode koriste visokostabilizirane kontinuirane (cw) lasere za stabilizaciju frekvencije udara. Na takav način se ne stabilizira f_{ceo} , nego optička frekvencija n -tog moda, tj. f_n . Upravo je tehnika stvaranja udara između frekvencije vanjskog lasera i frekventnih linija češlja primjenjena u našem laboratoriju. Na slici 6 prikazani su spektri frekventnog češlja i cw lasera. Kontinuirani (cw) laser je diodni laser tvrtke Moglabs s valnom duljinom od 780 nm, stabiliziran metodom polarizacijske spektroskopije [?]. Frekventni češalj je Er:dopirani laser koji emitira na 1560 nm. Korištenjem generatora drugog harmonika (eng. Second Harmonic Generator, SHG) frekventno udvostručavamo valnu duljinu Er:dopiranog lasera na 780 nm. Ovim postupkom osiguravamo da su frekvencije cw la-

sera i frekventnog češlja bliske. Prikaz dobivenog



Slika 6. Frekventne linije češlja i frekvencija vanjske reference. Na grafu su označene frekvencija vanjskog lasera (plava linija) i njene dvije najbliže linije frekventnog češlja (crvene linije). Preuzeto sa [?]

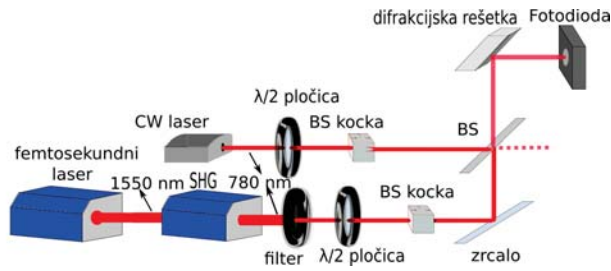
signala udara (eng. beat signal) dan je na Slici 7.



Slika 7. Frekvencija udara frekventnog češlja i cw lasera. Preuzeto sa [?]

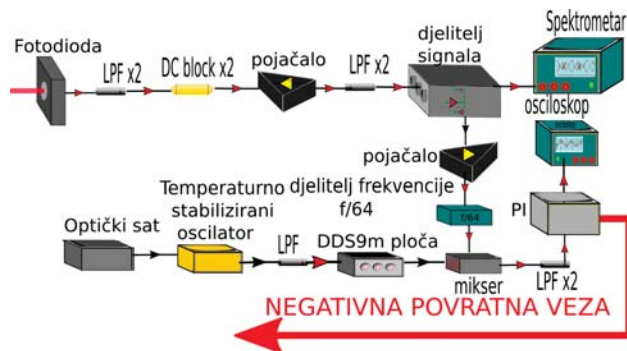
Postav za stvaranje udara dan je na Slici 8. Udari se stvaraju detektiranjem laserske zrake frekventnog češlja i cw lasera na zajedničkoj fotodiodi. Rezultantni signal naziva se beat signal i ima frekvenciju jednaku razlici frekvencija češlja i frekvencije vanjskog lasera

$$f_{\text{beat}} = f_{\text{cw}} - f_n \quad (6)$$



Slika 8. Optički dio postava za stabilizaciju frekvencije udara

Signal udara se tada šalje kroz elektronički dio postava za stabilizaciju, prikazanog na Slici 9.



Slika 9. Elektronički dio postava za stabilizaciju frekvencije udara

Frekvencija udara se stabilizira referenciranjem na Rb frekventni standard, šalje u mikser signala te prosljeđuje na PI kontroler. PI kontroler povratnom vezom kontrolira struju pumpnih dioda femtosekundnog lasera te na takav način stabilizira frekvenciju udara.

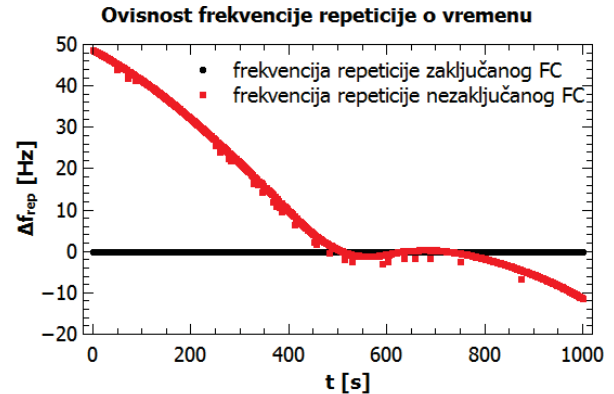
IV. MJERENJA FREKVENCIIJA I ANALIZA REZULTATA

Za mjerenje frekvencija repeticije i udara korišteni su postavi na Slikama 4, 8 i 9. Mjerenje je izvršeno korištenjem brojača frekvencija (eng. frequency counter) te programskog paketa Labview. Brzina mjerenja je 1 mjerenje u sekundi.

Mjerenje frekvencije repeticije

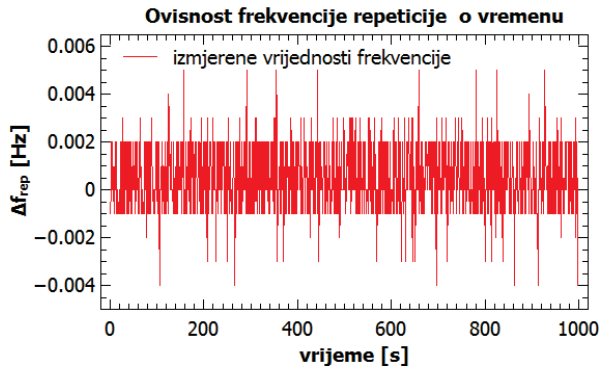
Pri mjerenju frekvencije repeticije izvršena su dva niza mjerenja, jedan niz za nezaključani frek-

ventni češalj, a drugi za frekventni češalj zaključan korištenjem postava sa Slike 4. Rezultati mjerenja dani su na slici 10. Na Slici 10 prika-



Slika 10. Ovisnost frekvencije repeticije o vremenu za zaključani i nezaključani frekventni češalj. Na osi ordinati nalaze se odstupanja izmjerenih vrijednosti frekvencije od srednje vrijednosti uzorka

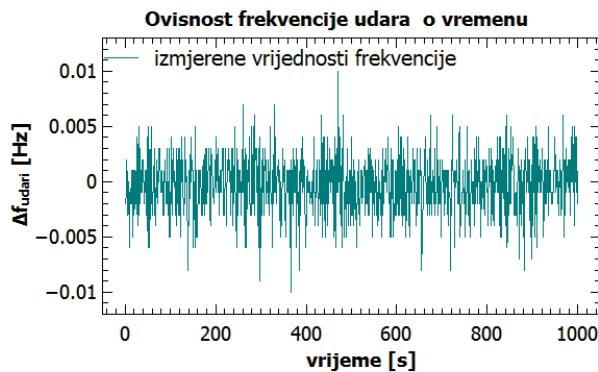
zana su odstupanja izmjerenih vrijednosti frekvencije od srednje vrijednosti uzorka u ovisnosti o vremenu. Uočavamo da se za nezaključani frekventni češalj frekvencija repeticije promjeni za 55 Hz za vrijeme mjerenja od 1000 s, što je 6 redova veličine manje od same frekvencije repeticije ($f_{rep} \approx 80.5 \text{ Mhz}$). Ova je nestabilnost frekvencije uzrokovana je nepostojanjem aktivnog sustava stabilizacije tj. laser klizi (eng. drift) u vremenu zbog različitih parametara okoline kao što su npr. promjena temperature, buke, toka zraka i oni onemogućavaju provođenje eksperimenta s hladnim atomima za koje će se navedeni laser koristiti. S druge strane, izmjerene frekvencije repeticije zaključanog lasera se na ovoj skali ne razlikuju od srednje vrijednosti uzorka. Stoga, promotrimo frekvenciju repeticije zaključanog lasera na manjoj skali koja je prikazana na Slici 11. Uočavamo da se za zaključani frekventni češalj frekvencija repeticije promjeni 10 mHz u vremenu mjerenja od 1000 s što je 9 redova veličine manje od same frekvencije i jasan je pokazatelj uspješno izvršene stabilizacije frekvencije repeticije.



Slika 11. Ovisnost frekvencije repeticije o vremenu za zaključani frekventni češalj na miliherznoj skali

Mjerenje frekvencije udara

Za mjerenje frekvencije udara korišteni su postavi sa Slika 8 i 9. Mjerenja su ponovno izvršena korištenjem brojača frekvencija. Dobiveni rezultati dani su na Slici 12.



Slika 12. Mjerenje ovisnosti frekvencije udara o vremenu za zaključani frekventni češalj

Sa Slike 12 može se uočiti ista razina stabilnosti frekvencije udara reda veličine mHz, slično kao i kod stabilizacije frekvencije repeticije. Ipak, važno je uočiti veću rasutost izmjerenih frekvencija uzrokovanu različitim metodama stabilizacije. Ova razlika u raspšenosti utjecati će na rezultate statističke analize.

Vremenska stabilnost frekventnog češlja

Analiza stabilnosti frekvencije izvršena je korištenjem računa Allanove devijacije-statističke

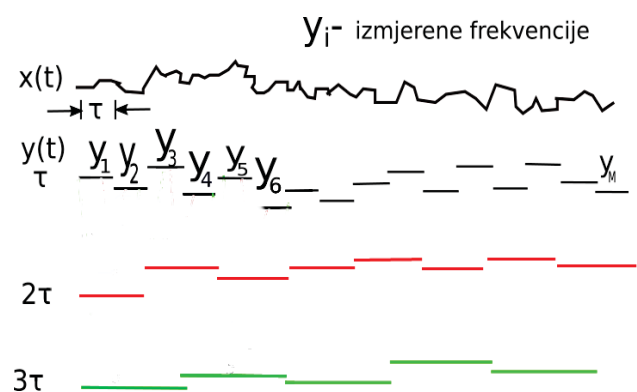
metode posebno dizajnirane za analizu stabilnosti frekvencija u satovima, oscilatorima i pojačalima. Za razliku od standardne devijacije definirane kao korijena kvadrata razlike između izmjerenih vrijednosti i njihove srednje vrijednosti, Allanova devijacija dana je kao korijen kvadrata razlike između dviju uzastopno izmjerenih usrednjenih vrijednosti. Prije analize podataka, potrebno je definirati veličine korištene u Allanovoj devijaciji. Neka je $x(t)$ ovisnost frekvencije na brojaču frekvencija o vremenu. U našem slučaju $x(t)$ predstavlja signal koji dolazi na brojač frekvencija. Na samom uređaju moguće je postaviti vrijeme mjerenja svake frekvencije (sample rate) τ , te je on postavljen na $\tau = 1$ s. Tada je moguće definirati usrednjenu razlomačku frekvenciju (eng. average fractional frequency)

$$y = \frac{x_{i+1} - x_i}{\tau} \quad (7)$$

gdje je τ dano kao vrijeme mjerenja svake frekvencije (eng. sample time). U našem mjerenju varijabla y može se promatrati kao usrednjena izmjerena frekvencija u intervalu mjerenja od 1 sekunde. Allanova devijacija je tada definirana kao

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{i=1}^{M-1} (y_{i+1} - y_i)^{1/2} \quad (8)$$

Grafički prikaz varijabli $x(t)$ i y_i dan je na Slici 13. Za računanje Allanove devijacije $\sigma_y(\tau)$ ko-

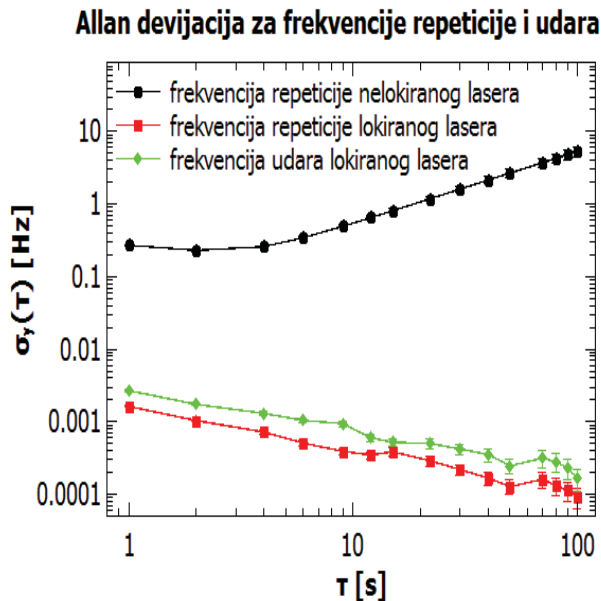


Slika 13. Grafički prikaz računa Allanove devijacije

riste se vrijednosti y_i sa Slike 13 i uvrste u relaciju(8).

Kako bi izračunali $\sigma_y(2\tau)$, potrebno je usrednjiti

izmjerene frekvencije $x(t)$ u intervalu dvostrukog sample rate ($\tau = 2$ s). Te nove frekvencije mogu se nazvati y_i usrednjene preko 2τ te ih ponovo uvrštava u relaciju (8) i dobiva Allanova devijacija $\sigma_y(2\tau)$. Povećavanjem vrijednosti τ potrebno je usrednjavati sve veći i veći broj susjednih frekvencija y_i pri računu Allanove devijacije. Opisani postupak izvršen je na frekvencijama repeticije i udara izmjerenim u laboratoriju. Rezultati su dani na slici 14.



Slika 14. Allanova devijacija za frekvencije repeticije i udara

Na grafu na Slici 14 prikazane su Allanove devijacije za nezaključani laser, te za stabilizirane frekvencije repeticije i udara. Moguće je uočiti

rast nestabilnosti za nestabilizirani frekventni češalj što je očekivano ponašanje budući da frekvencija kontinuirano klizi u vremenu (Slika 9). S druge strane, Allanove devijacije za stabilizirani frekventni češalj se smanjuju sa povećanjem τ što je jasan znak kvalitetno izvršene stabilizacije. Važno uočiti veću devijaciju za frekvenciju udara u odnosu na frekvenciju repeticije. Ovaj rezultat uzrokovan je većom raspšenošću frekvencija udara.

V. ZAKLJUČAK

U ovom seminarskom radu pojašnjene su metode dobivanja i stabilizacije frekventnog češlja. Uspio sam stabilizirati frekvencije repeticije i udara te sam izmjerio njihovu promjenu u vremenu za zaključani i nezaključani frekventni češalj. Izmjereni rezultati daju stabilnost frekvencija reda mHza što je 9-10 redova manje od samih frekvencija, čime smo efektivno stabilizirali frekventni češalj. Konačno, napravio sam analizu dobivenih podataka korištenjem metode Allanove devijacije. Rezultati daju devijaciju između 10^{-3} i 10^{-4} čime smo potvrdili dobru stabilnost frekventnog češlja.

VI. ZAHVALE

Htio bih zahvaliti mentoru Damiru Aumileru i Ticijani Ban na ukazanom strpljenju i prenesenom znanju pri izradi ovog seminara. Usto, posebne zahvale doktorandu Nevenu Šantiću na strpljivim i višestrukim pojašnjenjima tehničkih detalja.

-
- [1] Andrew D. Ludlow, Nathan M. Hinkley, Jeffrey A. Sherman, Nate B. Phillips, Marco Schioppo, Nathan D. Lemke, Kyle P. Beloy, M Pizzocaro, Christopher W. Oates, "An atomic clock with 10-18 instability", *Science* 341(6151), 1215–1218 (2013).
- [2] D. Aumiler, 2006. "Rezonantna interakcija atoma i molekula s femtosekundnim laserskim frekventnim češljem", Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu
- [3] <https://www.vahala.caltech.edu/Research/FreqDiv>
- [4] <http://www.ni.com/white-paper/3782/en/>
- [5] R. Holzwarth, Th. Udem, T. W. Hänsch, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, and P. St. J. Russell, "Optical Frequency Synthesizer for Precision Spectroscopy", *Phys. Rev. Lett.* 85, 2264
- [6] C.R. Locke, E.N. Ivanov, P. S. Light, F. Benabid, and A.N. Luiten, "Frequency stabilisation of a fibre-laser comb using a novel microstructured fibre", *Optics Express* Vol. 17, Issue 7, pp. 5897-5904 (2009)
- [7] Pearman, C. P. et al. Polarization spectroscopy of a closed atomic transition: Application to la-

- ser frequency locking. J. Phys. B 35, 5141-5151
- [8] https://www.rp-photonics.com/frequency_combs.html
- [9] <http://cold.ifs.hr/research/research-2/>